Tác giả:

- *Lương Văn Thiện – KSTN ĐTVT K55*
- *Trần Vũ Trung – KSTN ĐKTĐ K55*
- *Nguyễn Văn Hưởng – KSTN ĐKTĐ K58*

ĐÁP ÁN TOÁN KSTN 2010

Câu 1.

1) Đặt $I = \int_0^{2\pi} \sin(\sin x + nx)dx, (n \in N)$

Đổi biến $x = y + \pi$, ta có:

$$I = \int_{-\pi}^{\pi} \sin(-\sin y + n\pi + ny)dy$$

Xét hàm dưới dấu tích phân $f(y) = \sin(-\sin y + n\pi - ny)$.

$f(-y) = \sin(-\sin(-y) + n\pi - ny) = \sin(\sin y + n\pi - ny) = \sin(\sin y + n\pi - ny - 2n\pi)$

$= \sin(\sin y - n\pi - ny) = -\sin(-\sin y + n\pi + ny) = -f(y)$

Hàm dưới dấu tích phân là hàm lẻ nên $I = 0$

2)

$|f(x) - f(y)| \leq |x - y| \quad (*)$

Đặt $f(0) = a; f(a) = b$. Theo giả thiết, $f(b) = 0$

Áp dụng liên tiếp (*) ta có:

$|a - 0| \geq |f(a) - f(0)| = |b - a| \geq |f(b) - f(a)| = |0 - b| \geq |f(0) - f(b)| = |a - 0|$

Như vậy, các bất đẳng thức trung gian đều là đẳng thức. Ta được $|a| = |b| = |b - a|$

Từ đó suy ra $a = b = 0$. Vậy $f(0) = 0$

Câu 2.

1) Xét hàm $g(x) = f''(x) - x$

Do $f(x)$ khả vi liên tục cấp hai trên $[0; 1]$ nên $g(x)$ liên tục trên $[0; 1]$

Mà $g(0) = 1 > 0;\ g(1) = -1 < 0$

Do đó tồn tại $c \in (0; 1)$ sao cho $g(c) = 0$, khi đó $f''(c) = c$.

2) Thiết lập dãy $(u_n): u_1 = \sqrt{30}, u_{n+1} = \sqrt{30 + u_n} \quad (n \in N^*)$

Ta cần tính $\lim_{n\to\infty} u_n$.

Bằng cách quy nạp, dễ dàng chứng minh được $0 < u_n < 6$ với $\forall n \in N^*$

Ta có $u_{n+1}^2 - u_n^2 = 30 + u_n - u_n^2 = (6 - u_n)(5 + u_n) > 0$, suy ra $u_{n+1} > u_n$

Dãy (u_n) tăng, bị chặn trên bởi 6, nên hội tụ khi $n \to \infty$. Đặt $a = \lim_{n\to\infty} u_n \quad (0 < a \leq 6)$

Ta có: $a = \sqrt{30 + a} \Rightarrow a = 6$. Vậy:

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt{30 + \sqrt{30 + \cdots + \sqrt{30}}} = \lim_{n\to\infty} u_n = 6$$

Câu 3:

1)

Dễ thấy rằng tính chất lồi (lõm) của hàm số tại 1 điểm sẽ không thay đổi khi ta thêm vào nó một hàm tuyến tính bất kì. Nghĩa là với mọi $p; q \in R$ thì hàm $f(x)$ lồi (lõm) tại điểm x_0

Khi và chỉ khi hàm $f(x) + px + q$ lồi (lõm) tại điểm x_0.

Giả sử $f(x)$ khả vi trên đoạn $[a; b]$

Xét hàm $g(x) = f(x) + \frac{f(a) - f(b)}{b - a}(x - a)$

Ta có $g(a) = g(b)$. Khi đó, nếu $g(x)$ là hàm thì hiển nhiên có điểm lồi (lõm), nếu $g(x)$ không phải là hàm hằng thì nó có ít nhất một điểm cực trị trong (a, b). Dễ thấy điểm cực tiểu là điểm lồi, còn điểm cực đại là điểm lõm của $g(x)$.

Theo nhận xét ban đầu, ta suy ra tại điểm mà $g(x)$ đạt cực trị thì tại đó, $f(x)$ lồi hoặc lõm, suy ra đpcm.

2) Đặt $a = 1 + 2^2 + 3^3 + \cdots + 1000^{1000}$ và $b = 2^{2^{2^{2^2}}}$

Ta có:

$a < 1000^{1000} + 1000^{1000} + \cdots + 1000^{1000} = 1000.1000^{1000} = 1000^{1001} < (2^{10})^{1001} = 2^{10010}$;

$b = 2^{2^{2^{2^2}}} = 2^{2^{16}}$, mà $2^{16} = 2^{10}.2^6 > 1000.64 = 64000$, suy ra $b > 2^{64000}$

Rõ ràng $a < b$.

Câu 4.

Biểu diễn mỗi người trong phòng bằng một điểm trên mặt phẳng sao cho 5 điểm biểu diễn là A, B, C, D, E không có 3 điểm nào thẳng hàng. Nối tất cả các điểm bằng đoạn thẳng và tô màu đoạn đó. Đoạn thẳng nối 2 điểm ứng với 2 người được tô màu đỏ nếu họ quen nhau và tô màu xanh nếu không quen nhau.

Nhận xét 1: không có tam giác có 3 cạnh cùng màu (suy trực tiếp từ giả thiết)

Nhận xét 2: không có 3 đoạn cùng xuất phát từ cùng một đỉnh mà cùng màu.

Thật vậy, giả sử AB, AC, AD cùng màu đỏ thì áp dụng NX1, các đoạn BC, CD, DA cùng màu xanh, tam giác BCD mâu thuẫn với NX1.

Hệ quả của NX2: trong 4 đoạn xuất phát từ cùng một đỉnh phải có 2 cạnh xanh và 2 cạnh đỏ.

Không mất tính tổng quát, giả sử tại A có AB và AE đỏ, còn AC và AD xanh.

Áp dụng NX1:

- AB, AE đỏ → BE xanh
- AC, AD xanh → CD đỏ

* Nếu ED đỏ:

- DC, DE đỏ → CE xanh
- EB, EC xanh → BC đỏ

Cách sắp xếp theo vòng tròn ABCDEA thỏa mãn.

* Nếu ED xanh:

- EB, ED xanh → BD đỏ
- EB, ED xanh → EC đỏ (NX2)

Cách sắp xếp theo vòng tròn ABCDEA thỏa mãn.

Câu 5.

Dễ dàng chứng minh được;

$\tan A + \tan B = \tan C = \tan A.\tan B.\tan C \geq 3\sqrt{3}$

Áp dụng BĐT AM-GM (BĐT Cô-si) ta có:

$\tan^n A + \tan^n B + \tan^n C \geq 3\sqrt[3]{\left(3\sqrt{3}\right)^n}$

Mà $3\sqrt{3} > 1 + \frac{3}{2}$. Do vậy: $\tan^n A + \tan^n B + \tan^n C \geq 3\left(1 + \frac{3}{2}\right)^{\frac{n}{3}}$

Áp dụng BĐT Bernoulli: $\left(1 + \frac{3}{2}\right)^{\frac{n}{3}} > 1 + \frac{3}{2}.\frac{n}{3} = 1 + \frac{n}{2}$

Suy ra:

$$\tan^n A + \tan^n B + \tan^n C > 3\left(1 + \frac{n}{2}\right) = 3 + \frac{3n}{2}.$$